版权声明

目录

2026年浙江农林大学623数学(自命题)考研核心笔记

《高等数学》考研核心笔记

第1章　函数与极限

考研提纲及考试要求

考点：集合
考点：映射
考点：函数
考点：数列的概念
考点：数列的几何意义

考研核心笔记

【核心笔记】映射与函数

1.集合

（1）集合概念：
集合（简称集）：集合是指具有某种特定性质的事物的总体。用 A，B，M 等表示。
元素：组成集合的事物称为集合的元素。a 是集合 M 的元素表示为 $a\in M$。
集合的表示：
列举法：把集合的全体元素一一列举出来。
描述法：若集合 M 是由元素具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 可表示为：
$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,$M=\{x|x$ 具有性质 $P\}$。
几个数集：
N 表示所有自然数构成的集合，称为自然数集。
$N=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$。$N^+=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$。
R 表示所有实数构成的集合，称为实数集。
Z 表示所有整数构成的集合，称为整数集。
$Z=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$。
Q 表示所有有理数构成的集合，称为有理数集。

$$\boldsymbol{Q}=\{\frac{p}{q}|p\in Z,q\in \boldsymbol{N}^+\text{且}p\text{与}q\text{互质}\}$$

子集：若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supset A$
如果集合 A 与集合 B 互为子集，$A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$
若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$。
例如，$N\subsetneqq Z\subsetneqq Q\subsetneqq R$
不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$。规定空集是任何集合的子集。
（2）集合的运算
设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。
设 A、B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集（简称交），记作 $A\cap B$，即：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A\backslash B$，即：$A\backslash B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$。

如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集。此时，我们称集合 I 为全集或基本集。称 $I\backslash A$ 为 A 的余集或补集，记作 AC。

集合运算的法则：

设 A、B、C 为任意三个集合，则

①交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

②结合律（$A\cup B$）$\cup C=A\cup$（$B\cup C$），（$A\cap B$）$\cap C=A\cap$（$B\cap C$）；

③分配律（$A\cup B$）$\cap C=$（$A\cap C$）$\cup$（$B\cap C$），（$A\cap B$）$\cup C=$（$A\cup C$）$\cap$（$B\cup C$）；

④对偶律（$A\cup B$）$C=AC\cap BC$，（$A\cap B$）$C=AC\cup BC$。

（$A\cup B$）$C=AC\cap BC$ 的证明：

$x\in$（$A\cup B$）$C\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow x\in AC$ 且 $x\in BC\Leftrightarrow x\in AC\cap BC$，所以（$A\cup B$）$C=AC\cap BC$。

直积（笛卡儿乘积）：

设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对（x，y），把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记为 $A\times B$，即

$A\times B=\{$（x，y）$|x\in A$ 且 $y\in B\}$。

（3）区间和邻域

有限区间：设 $a<b$，称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间，记为（a，b），即：（a，b）$=\{x|a<x<b\}$。

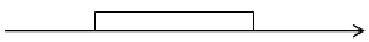
类似地有：

$[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$ 称为闭区间，$[a,b)=\{x|a\le x<b\}$、$(a,b]=\{x|a<x\le b\}$ 称为半开区间。

其中 a 和 b 称为区间（a，b）、[a，b]、[a，b）、（a，b]的端点，$b-a$ 称为区间的长度。

无限区间：$[a,+\infty)=\{x|a\le x\}$，$(-\infty,b]=\{x|x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x||x|<+\infty\}$。

区间在数轴上的表示：



邻域：以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 U（a）。

设 δ 是一正数，则称开区间（$a-\delta$，$a+\delta$）为点 a 的 δ 邻域，记作 U（a，δ）。

即：$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\}$。

其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

去心邻域 $\mathring{U}$（a，δ）：

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

2.映射

（1）映射的概念

定义设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作：$f: X\rightarrow Y$。

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 f（x），即：$y=f(x)$。

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即：$D_f=X$。

X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记为 R_f，或 f（X），即：$R_f=f(X)=\{f(x)|x\in X\}$。

需要注意的问题：

①构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应。

②对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f=Y$。

③f：$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1，1]$，对每个 $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，f（x）=sinx。

f 是一个映射，定义域 Df=$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，值域 Rf=[−1，1]。

满射、单射和双射：

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 f（x_1）≠f（x_2），则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射（或双射）。

（2）逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in X$，适合 f（x）=y，于是，我们可定义一个从 Rf 到 X 的新映射 g，即：g：$R_f \to X$。

对每个 $y \in R_f$，规定 g（y）=x，这 x 满足 f（x）=y。这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$。

按上述定义，只有单射才存在逆映射。上述三例中哪个映射存在逆映射？

设有两个映射：

$$g：X\to Y_1，f：Y_2\to Z$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$。则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x \in X$ 映射成 $f[g（x）] \in Z$。显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 fog，即

$$fog：X\to Z，（fog）（x）=f[g（x）]，x\in X$$

应注意的问题：

映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，$R_g \subset D_f$。否则，不能构成复合映射。由此可以知道，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，fog 有意义并不表示 gof 也有意义。即使 fog 与 gof 都有意义，复映射 fog 与 gof 也未必相同。

3.函数

（1）函数概念

定义设数集 $D \subset R$，则称映射 f：$D \to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为：y=f（x），$x \in D$，

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$。

应注意的问题：

记号 f 和 f（x）的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值。但为了叙述方便，习惯上常用记号“f（x），$x \in D$”或“y=f（x），$x \in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f。

函数符号：函数 y=f（x）中表示对应关系的记号 f 也可改用其它字母，例如“F”，“φ”等。此时函数就记作 y=φ（x），y=F（x）。

函数的两要素：

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 R 内，因此构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f。如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的。

函数的定义域：

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定。例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 t=0，落地的时刻 t=T，则 s 与 t 之间的函数关系是