考研新版
全国881所研招院校

硕士研究生入学招生考试

考研专业课精品资料

2026年郑州大学

《655数学分析》考研精品资料

策划：考研辅导资料编写组

真题汇编　明确考点
考研笔记　梳理重点
核心题库　强化训练
模拟试题　查漏补缺

高分学长学姐推荐

【初试】2026年 郑州大学655数学分析考研精品资料

说明：本套资料由高分研究生潜心整理编写，高清电子版支持打印，考研推荐资料。

一、郑州大学655数学分析考研真题汇编及考研大纲

1．郑州大学655数学分析1998、2000-2011、2013、2018、2020年、(回忆版)2019、2023年考研真题，其中2008-2009、2023年有答案。

说明：分析历年考研真题可以把握出题脉络，了解考题难度、风格，侧重点等，为考研复习指明方向。

2．郑州大学655数学分析考研大纲

①2025年郑州大学655数学分析考研大纲。

说明：考研大纲给出了考试范围及考试内容，是考研出题的重要依据，同时也是分清重难点进行针对性复习的推荐资料，本项为免费提供。

二、2026年郑州大学655数学分析考研资料

3．《数学分析》考研相关资料

(1)《数学分析》[笔记+提纲]

①2026年郑州大学655数学分析之《数学分析》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段必备资料。

②2026年郑州大学655数学分析之《数学分析》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

4．《数学分析讲义》考研相关资料

(1)《数学分析讲义》[笔记+提纲]

①郑州大学655数学分析之《数学分析讲义》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段推荐资料。

②郑州大学655数学分析之《数学分析讲义》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

5．《数学分析》考研相关资料

(1)《数学分析》[笔记+提纲]

①郑州大学655数学分析之《数学分析》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段推荐资料。

②郑州大学655数学分析之《数学分析》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

三、电子版资料全国统一零售价

本套考研资料包含以上部分(不含教材)，全国统一零售价：[￥]

四、2026年研究生入学考试指定/推荐参考书目(资料不包括教材)

郑州大学655数学分析考研初试参考书

《数学分析》(2018 年，第四版)，欧阳光中等编，高等教育出版社。
《数学分析讲义》(2011 年，第五版)，刘玉琏等编，高等教育出版社。
《数学分析》(2019 年，第五版)，华东师大编，高等教育出版社

五、本套考研资料适用学院及考试题型

数学与统计学院

简答题、论述题

六、本专业一对一辅导(资料不包含，需另付费)

提供本专业高分学长一对一辅导及答疑服务，需另付费，具体辅导内容计划、课时、辅导方式、收费标准等详情请咨询机构或商家。

七、本专业报录数据分析报告(资料不包含，需另付费)

提供本专业近年报考录取数据及调剂分析报告，需另付费，报录数据包括：
①报录数据-本专业招生计划、院校分数线、录取情况分析及详细录取名单；
②调剂去向-报考本专业未被录取的考生调剂去向院校及详细名单。

目录

封面......1

目录......4

郑州大学 655 数学分析历年真题汇编......10

郑州大学 655 数学分析 2023 年考研真题（回忆版）......10
郑州大学 655 数学分析 2023 年考研真题参考答案（回忆版）......12
郑州大学 655 数学分析 2020 年考研真题（暂无答案）......25
郑州大学 655 数学分析 2019 年考研真题（回忆版）（暂无答案）......26
郑州大学 655 数学分析 2018 年考研真题（暂无答案）......27
郑州大学 655 数学分析 2013 年考研真题（暂无答案）......30
郑州大学 655 数学分析 2011 年考研真题（暂无答案）......32
郑州大学 655 数学分析 2010 年考研真题（暂无答案）......33
郑州大学 655 数学分析 2009 年考研真题......35
郑州大学 655 数学分析 2009 年考研真题参考答案......36
郑州大学 655 数学分析 2008 年考研真题......39
郑州大学 655 数学分析 2008 年考研真题参考答案......40
郑州大学 655 数学分析 2007 年考研真题（暂无答案）......43
郑州大学 655 数学分析 2006 年考研真题（暂无答案）......44
郑州大学 655 数学分析 2005 年考研真题（暂无答案）......46
郑州大学 655 数学分析 2004 年考研真题（暂无答案）......48
郑州大学 655 数学分析 2003 年考研真题（暂无答案）......51
郑州大学 655 数学分析 2002 年考研真题（暂无答案）......52
郑州大学 655 数学分析 2001 年考研真题（暂无答案）......53
郑州大学 655 数学分析 2000 年考研真题（暂无答案）......55
郑州大学 655 数学分析 1998 年考研真题（暂无答案）......57

郑州大学 655 数学分析考研大纲......59

2025 年郑州大学 655 数学分析考研大纲......59

2026 年郑州大学 655 数学分析考研核心笔记......63

《数学分析》考研核心笔记......63

第 1 章 变量与函数......63
考研提纲及考试要求......63
考研核心笔记......63
第 2 章 极限与连续......67
考研提纲及考试要求......67
考研核心笔记......67
第 3 章 关于实数的基本定理及闭区间上连续函数性质的证明......83

考研提纲及考试要求......83
考研核心笔记......83
第 4 章 导数与微分......85
考研提纲及考试要求......85
考研核心笔记......85
第 5 章 微分中值定理及其应用......92
考研提纲及考试要求......92
考研核心笔记......92
第 6 章 不定积分......101
考研提纲及考试要求......101
考研核心笔记......101
第 7 章 定积分......107
考研提纲及考试要求......107
考研核心笔记......107
第 8 章 定积分的应用和近似计算用......113
考研提纲及考试要求......113
考研核心笔记......113
第 9 章 数项级数......118
考研提纲及考试要求......118
考研核心笔记......118
第 10 章 广义积分......126
考研提纲及考试要求......126
考研核心笔记......126
第 11 章 函数项级数、幂级数......130
考研提纲及考试要求......130
考研核心笔记......130
第 12 章 富里埃级数和富里埃变换......137
考研提纲及考试要求......137
考研核心笔记......137
第 13 章 多元函数的极限和连续性......142
考研提纲及考试要求......142
考研核心笔记......142
第 14 章 多元函数微分学......149
考研提纲及考试要求......149
考研核心笔记......149
第 15 章 极值和条件极值......157
考研提纲及考试要求......157
考研核心笔记......157
第 16 章 隐函数存在定理、函数相关......161
考研提纲及考试要求......161

考研核心笔记........161
第 17 章 含参变量的积分........164
考研提纲及考试要求........164
考研核心笔记........164
第 18 章 含参变量的广义积分........168
考研提纲及考试要求........168
考研核心笔记........168
第 19 章 积分（二重、三重积分，第一类曲线、曲面积分）的定义和性质........173
考研提纲及考试要求........173
考研核心笔记........173
第 20 章 重积分........176
考研提纲及考试要求........176
考研核心笔记........176
第 21 章 曲线积分和曲面积分的计算........184
考研提纲及考试要求........184
考研核心笔记........184
第 22 章 各种积分间的联系和场论初步........190
考研提纲及考试要求........190
考研核心笔记........190
《数学分析讲义》考研核心笔记........194
第 1 章 函数........194
考研提纲及考试要求........194
考研核心笔记........194
第 2 章 极限........203
考研提纲及考试要求........203
考研核心笔记........203
第 3 章 连续函数........210
考研提纲及考试要求........210
考研核心笔记........210
第 4 章 实数的连续性........218
考研提纲及考试要求........218
考研核心笔记........218
第 5 章 导数与微分........229
考研提纲及考试要求........229
考研核心笔记........229
第 6 章 微分学基本定理及其应用........238
考研提纲及考试要求........238
考研核心笔记........238
第 7 章 不定积分........251

考研提纲及考试要求......251
考研核心笔记......251
第 8 章　定积分......260
考研提纲及考试要求......260
考研核心笔记......260
第 9 章　级数......288
考研提纲及考试要求......288
考研核心笔记......288
第 10 章　多元函数微分学......304
考研提纲及考试要求......304
考研核心笔记......304
第 11 章　隐函数......315
考研提纲及考试要求......315
考研核心笔记......315
第 12 章　广义积分与含参变量的积分......327
考研提纲及考试要求......327
考研核心笔记......327
第 13 章　重积分......345
考研提纲及考试要求......345
考研核心笔记......345
第 14 章　曲线积分与曲面积分......353
考研提纲及考试要求......353
考研核心笔记......353

《数学分析》考研核心笔记......379

第 1 章　实数集与函数......379
考研提纲及考试要求......379
考研核心笔记......379
第 2 章　数列极限......387
考研提纲及考试要求......387
考研核心笔记......387
第 3 章　函数极限......394
考研提纲及考试要求......394
考研核心笔记......394
第 4 章　函数连续性......406
考研提纲及考试要求......406
考研核心笔记......406
第 5 章　导数和微分......413
考研提纲及考试要求......413
考研核心笔记......413

郑州大学655数学分析历年真题汇编

郑州大学655数学分析2023年考研真题（回忆版）

一、（10分）求函数极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[4]{x^4-x^3}\right)$.

二、（10分）求不定积分：$\int\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$.

三、（10分）设$f(x)$在$\mathbb{R}$上是连续函数，求二重积分：

$$I=\iint_D x\left[1-yf\left(x^2-y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中D为$y=x^3, y=1, x=-1$所围成的区域.

四、（10分）设$f(x)$可导，$z(x,y)=\int_0^y e^y f(x-t)\mathrm{d}t$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、（10分）讨论数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$的条件收敛和绝对收敛性.

六、（10分）讨论函数$f(x)=x^2+\sin x$的一致连续性.

七、（15分）设$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上黎曼可积，求

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{1+x}\sin^n x\mathrm{d}x.$$

八、（15分）设$f(x)=f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, f_{n+1}(x)=f\left(f_n(x)\right)$，其中$n=1,2,\cdots$.

(1) 求$f_n(x)$的表达式，$n=1,2,\cdots$.

(2) 证明：函数列$\left\{f_n(x)\right\}$在$\mathbb{R}$上一致收敛.

九、（20分）证明题.

(1) 设函数$f(x)$在(a,b)内可导，且

郑州大学 655 数学分析考研大纲

2025 年郑州大学 655 数学分析考研大纲

郑州大学2025年硕士研究生入学考试
《数学分析》考试大纲

命题学院：014数学与统计学院　　　考试科目代码及名称：655数学分析

一、考试基本要求及适用范围概述

本《数学分析》考试大纲适用于本科大学生数学相关专业硕士研究生入学考试。数学分析是一门重要的数学基础课程，主要内容：实数理论、一元函数微分学和积分学、级数、多元函数微分学和积分学等。要求考生系统地理解和掌握数学分析的基本概念、理论，掌握数学分析的基本思想和方法，并具有抽象思维能力、逻辑推理能力、计算论证能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力。

二、考试形式

硕士研究生入学生物化学考试为闭卷，笔试，考试时间为180分钟，本试卷满分为150分。

试卷结构（题型）：**简答题、论述题**

三、考试内容

（一）实数理论

考试内容：

数列、函数极限分析定义；左、右极限；无穷小与无穷大定义；无穷小的比较；极限一般性质、四则运算和复合运算性质；极限存在判定准则；求极限方法；

函数的连续性；间断点及分类；函数一致连续性及判定法；闭区间上连续函数4条性质；上(下)确界、上(下)极限、聚点概念；实数完备性的7个等价描述。

考试要求：

（1）掌握函数初等特性和基本初等函数及其图形。

（2）理解变量极限及连续的概念，会判定极限的存在性，会证明数列的收敛性，掌握求极限的基本方法。

（3）掌握函数一致连续性的论证方法，掌握闭区间上连续函数的基本性质及其应用。

（4）理解上(下)确界和数列上(下)极限概念，了解实数完备性的等价命题。

（二）一元函数微分学部分

考试内容：

导数概念及几何意义；导数四则、复合、反函数运算法则；隐函数、参量函数求导方法；微分概念及几何意义；微分四则运算法则；高阶导数；高阶微分；求导数或微分；Fermat引理；Rolle、Lagrange和Cauchy中值定理；两种余项形式的Taylor公式；洛必塔法则；函数单调性、凹凸性及判定法；函数极值点、拐点及判定法；曲线渐近线。

考试要求：

（1）理解导数和微分的概念，掌握导数与微分、高阶导数的计算方法。

（2）掌握微分中值定理、Taylor公式及其应用。掌握不等式证明的微分学方法。

（3）会用导数判定函数的几何性态。

（三）一元函数积分学

考试内容：

原函数概念；不定积分及性质；定积分概念；可积性判定准则；可积的充分条件；定积分性质；定积分中值定理；变限积分函数及性质；原函数存在性；微积分学基本定理；换元积分法；分部积分法；不定积分计算法；定积分计算法；定积分在几何上应用。

考试要求：

（1）理解原函数、定积分的概念，了解可积性判定准则。掌握积分计算方法。

（2）掌握定积分的基本性质，掌握变限积分求导公式，掌握微积分学基本定理及其应用。

（四）多元函数微积分学部分

考试内容：

多元函数概念；二重极限与累次极限；二重极限存在性判定与求法；多元函数连续性及性质；偏导数、方向导数与全微分概念；一阶全微分形式不变性；高阶偏导数；偏导数计算法；链式法则；隐函数(组)存在性及求导法；偏导数在几何上应用；多元函数极值及判定法；条件极值与Lagrang乘数法；多元函数最大(小)值的确定。二、三重积分概念与性质；重积分累次积分法、极坐标法、截面积分法、柱面坐标法、球面坐标法、一般变量替换法；两类曲线积分概念、性质及联系；两类曲线积分计算法；Green公式；两类曲面积分概念、性质及联系；两类曲面积分计算法；奥高公式；Stokes公式；平面曲线积分与路径无关的等价命题。

考试要求：

（1）会判断二重极限的存在性，理解多元函数连续、偏导数、全微分、方向导数的概念及相互联系。

（2）掌握偏导数（高阶偏导数）的计算方法，掌握隐函数的求导方法，掌握微分学在几何上的应用，

（3）掌握多元函数极值的判定法，会用Lagrang乘数法解决实际问题。

（4）理解重积分、曲线积分、曲面积分的概念及其几何或物理意义，掌握它们的基本性质。

（5）掌握二重、三重积分的基本计算方法，掌握两类曲线积分、曲面积分的相互联系和计算方法。

（6）掌握Green公式、奥高公式及其应用，掌握平面曲线积分与路径无关的等价命题，了解Stokes公式及场论。

（五）级数

考试内容：

常数项级数敛散性及性质；正项级数审敛法；任意项级数审敛法；绝对收敛与条件收敛；函数项级数相关概念；函数列(级数)一致收敛性及判别法；函数列(级数)的分析运算性质；幂级数收敛半径；Abel第一、第二定理；幂级数分析性质；Fourier级数的收敛性定理；函数展开成幂级数；函数展开成Fourier级数或正弦、余弦级数；级数求和问题。

考试要求：

（1）理解绝对收敛和条件收敛概念，掌握正项级数和任意项级数的各种审敛法。

（2）理解函数列(函数项级数)一致收敛性概念，掌握一致收敛判别法，掌握函数列(函数项级数)的分析性质。

（3）会将函数展开成幂级数或Fourier级数，掌握幂级数的求和方法。

（六）反常积分

考试内容：

两类反常积分敛散性及性质；反常积分审敛法；绝对收敛与条件收敛；两类反常积分的联系；含参变量积分(反常积分)函数的概念；含参量积分函数的分析性质；含参量变限积分函数的求导法则；含参变量反常积分一致收敛性及判别法；含参量反常积分函数分析运算性质；反常积分（含参变量积分）计算法。

考试要求：

（1）理解两类反常积分敛散性的概念与性质，掌握反常积分的各种审敛法，会计算简单的反常积分。

（2）理解含参变量积分(反常积分)函数的概念及分析性质，掌握含参变量反常积分一致收敛判别法。

四、考试要求

硕士研究生入学考试科目《数学分析》为闭卷，笔试，考试时间为180分钟，本试卷满分为150分。试卷务必书写清楚、符号和西文字母运用得当。答案必须写在答题纸上，写在试题纸上无效。

五、主要参考教材（参考书目）

《数学分析》（2018年，第四版），欧阳光中等编，高等教育出版社。
《数学分析讲义》（2011年，第五版），刘玉琏等编，高等教育出版社。
《数学分析》（2019年，第五版），华东师大编，高等教育出版社。

编制单位：郑州大学
编制日期：2024年10月

2026年郑州大学655数学分析考研核心笔记

《数学分析》考研核心笔记

第1章　变量与函数

考研提纲及考试要求

考点：变量
考点：函数
考点：函数的一些几何特性
考点：复合函数
考点：反函数
考点：初等函数

考研核心笔记

【核心笔记】函数的概念

1.变量

变量、常量、实数性质、区间表示

2.函数

（1）定义1

设$X,Y\subset R$，如果存在对应法则f，使对$\forall x\in X$，存在唯一的一个数$y\in Y$与之对应，则称f是定义在数集X上的函数，记作$f:X\to Y$（$x\mapsto y$）也记作$x\mapsto f(x)$。习惯上称x自变量，y为因变量。函数f在点x的函数值，记为$f(x)$，全体函数值的集合称为函数f的值域，记作$f(X)$。即

$$f(X)=\{y\mid y=f(x),x\in X\}。$$

（2）注

①函数有三个要素，即定义域、对应法则和值域。

②函数的记号中的定义域D可省略不写，而只用对应法则f来表示一个函数。即“函数$y=f(x)$”或“函数f”。

③“映射”的观点来看，函数f本质上是映射，对于$a\in D$，$f(a)$称为映射f下a的象。a称为$f(a)$的原象。

（3）函数的表示方法

①主要方法：解析法（分式法）、列表法和图象法。

②可用“特殊方法”来表示的函数。

a.分段函数：在定义域的不同部分用不同的公式来表示。

b.用语言叙述的函数。

3.函数的一些几何特性

（1）单调函数

定义 2

设 f 为定义在 X 上的函数，$\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$，（1）若 $f(x_1)\le f(x_2)$，则称 f 为 X 上的增函数；若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 f 为 X 上的严格增函数。（2）若 $f(x_1)\ge f(x_2)$，则称 f 为 X 上的减函数；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 f 为 X 上的严格减函数。

（2）奇函数和偶函数

定义 3

设 X 为对称于原点的数集，f 为定义在 X 上的函数。若对每一个 $x\in X$，有（1）$f(-x)=-f(x)$，则称 f 为D上的奇函数；（2）$f(-x)=f(x)$，则称 f 为 X 上的偶函数。

注：①从函数图形上看，奇函数的图象关于原点对称（中心对称），偶函数的图象关于 y 轴对称；

②奇偶性的前提是定义域对称；

③从奇偶性角度对函数分类：$\begin{cases}\text{奇函数}\\\text{偶函数}\\\text{非奇非偶函数}\\\text{既奇又偶函数}\end{cases}$

（3）周期函数

定义 4

设 f 为定义在数集 X 上的函数，若存在 $T>0$，使得对一切 $x\in T$ 有 $f(x+T)=f(x)$，则称 f 为周期函数，T 称为 f 的一个周期。

注：①若 T 是 f 的周期，则 $nT(n\in N_+)$ 也是 f 的周期，所以周期不唯一。

②任给一个函数即使存在周期也不一定有最小正周期，如：$y=C$（C为常数），任何正数都是它的周期。

【核心笔记】复合函数和反函数

1.复合函数

（1）引言

先考察一个例子。

例：质量为 m 的物体自由下落，速度为 v，则功率 E 为

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v &= gt \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

我们得到两个函数 $f(v)=\frac{1}{2}mv^2, v=gt$，把 v 代入 f，即得

$$f(v)=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

这样得到的函数称为“复合函数”。

（2）定义（复合函数）

设有两个函数 $y=\varphi(u), u\in U, u=f(x), x\in X$，若 $f(X)\subset U$ 内，则对每一个 $x\in X$，通过 f 对应 U 内唯一一个值 u，而 u 又通过 φ 对应唯一一个值 y，这就确定了一个定义在 X 上的函数，它以 x 为自变量，y 因变量，记作 $y=\varphi(f(x)), x\in X$。这种函数成为复合函数。

注：两个函数能复合，第一个函数的值域必须包含在第二个函数的定义域中。

例：$y=\sin u, u=\sqrt{v}, v=1-x^3$，复合成：$y=\sin\sqrt{1-x^3}, x\in[-1,1]$.

不仅要会复合，更要会分解。

$$y=2^{\sin^2 x}\to y=2^u, u=v^2, v=\sin x.$$

2.反函数

（1）反函数概念

设函数 $y=f(x), x\in X$。满足：对于值域 $f(X)$ 中的每一个值 y，X 中有且只有一个值 x，使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(X)$ 上的函数，称这个函数为 f 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y), y\in f(X).$$

（2）注：

①并不是任何函数都有反函数；

②函数 f 与 f^{-1} 互为反函数，并有: $f^{-1}(f(x))\equiv x, x\in X$，$f(f^{-1}(x))\equiv y, y\in f(X).$，则函数 f 的反函数 f^{-1} 通常记为

$$y=f^{-1}(x), x\in f(X).$$

定理：设 $y=f(x), x\in X$ 为严格增（减）函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(X)$ 上也是严格增（减）函数。

【核心笔记】基本初等函数

1.初等函数

（1）基本初等函数（7 类）

常量函数

$$y=C\text{（C 为常数）；}$$

幂函数

$$y=x^{\alpha}(\alpha\in R)\text{；}$$

指数函数

$$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)\text{；}$$

对数函数

$$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)\text{；}$$

三角函数

$$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x\text{；}$$

反三角函数

$$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=ar\tan x,y=arc\cot x\text{。}$$

双曲函数

$$shx=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\quad chx=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\quad thx=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}},\quad cthx=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

（2）初等函数

定义 3

由基本初等函数经过在有限次四则运算与有限次复合运算所得到的函数，统称为初等函数，如：

$$y=2\sin x+\cos^{3}x,y=\log_{a}x+\frac{e^{\sin\sqrt{x}}-1}{x^{4}},y=|x|.$$

不是初等函数的函数，称为非初等函数。如 Dirichlet 函数、Riemann 函数、取整函数等都是非初等函数。

《数学分析讲义》考研核心笔记

第 1 章　函数

考研提纲及考试要求

考点：函数概念
考点：函数的图象
考点：单调函数
考点：反函数
考点：复合函数
考点：初等函数

考研核心笔记

【核心笔记】函数

函数是整个高等数学中最基本的研究对象，可以说数学分析就是研究函数的，因此我们对函数的概念以及常见的一些函数有一个清楚的认识。

1.函数概念

例 1.真空中自由落体，物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着.如果物体距地面的高度为 h，

$$\forall t \in [0, \sqrt{\frac{2h}{g}}]$$

都对应一个距离 s.已知 t 与 s 之间的对应关系是

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

其中 g 是重力加速度，是常数.

关于函数概念的几点说名

（1）函数 f 由两个因数完全决定，一个是 f 的定义域 A；另一个是 f 在每个 x∈A 的函数值 f（x）。

（2）在函数概念中，对应关系 f 是抽象的，只有在具体函数中，对应关系 f 才是具体的。

为了对函数 f 有个直观形象的认识，可将 f 比喻为一部“数值转换器”。

（3）根据函数定义，函数都存在定义域，但是常常并不明确指出函数的定义域，这时认为函数的定义域是自明的，即定义域是使函数有意义的实数的集合。

（4）函数定义指出：“任意数 x($\forall x \in A$)，按照对应关系 f，对应唯一一个 y∈R”，这样的对应就是所谓单值对应。

（5）从现代数学观点来看，这个函数概念是不严格的，应为这里用到了与函数概念等价的“对应关系”或“对应”。何谓对应关系或对应尚无定义。

2.函数的四则运算

设两个函数 f 与 g 分别定义在数集 A 与 B 。

若 $A=B$，且 $\forall x\in A$，有 $f(x)=g(x)$，则称 f 与 g 相等，表为：$f=g$。

若 $A\cap B\neq\phi$，则函数 f 与 g 的和 $f+g$、差 $f-g$、积 fg 分别定义为：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad x\in A\cap B。$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\quad x\in A\cap B。$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x),\quad x\in A\cap B。$$

若 $(A\cap B)-\{x\mid g(x)=0\}\neq\phi$，则函数 f 与 g 的商 $\frac{f}{g}$ 定义为

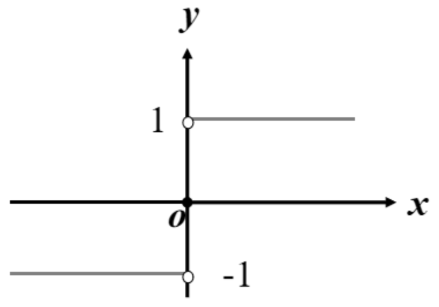
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in(A\cap B)-\{x\mid g(x)=0\}。$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in(A\cap B)-\{x\mid g(x)=0\}。$$

3.函数的图象

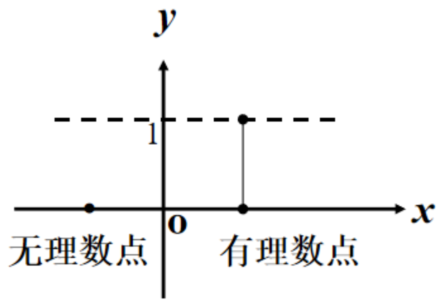
符号函数:

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & 当x>0\\ 0 & 当x=0\\ -1 & 当x<0\end{cases}$$



狄利克雷函数:

$$y=D(x)=\begin{cases}1 & 当x是有理数时\\ 0 & 当x是无理数时\end{cases}$$



4.数列

数列的定义:

定义在自然数集 N 上的函数 $f(x)$ 称为数列.

$\forall n \in \mathrm{N}$，设 $f(n)=a_n$. 因为自然数能够按照大小顺序排列起来，所以数列的值域 $\{a_n | n \in \mathrm{N}\}$ 中的数也能够相应地按照自然数 n 的顺序排列起来，即 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$. a_n 称为数列（1）的第 n 项或通项.

【核心笔记】几种特殊的函数

1.有界函数

定义设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义. 若函数值的集合 $f(A)=\{f(x)|x \in A\}$ 有上界（有下界、有界），则称函数 $f(x)$ 在 A 有上界（有下界、有界），否则称函数 $f(x)$ 在 A 无上界（无下界、无界）.

例 1 正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 在 R 有界（如图 1.8 与图 1.9）

事实上，$\exists \mathrm{M}=1>0, \quad \forall x \in R,$ 有 $|\sin x| \leq 1$ 与 $|\cos x| \leq 1$.

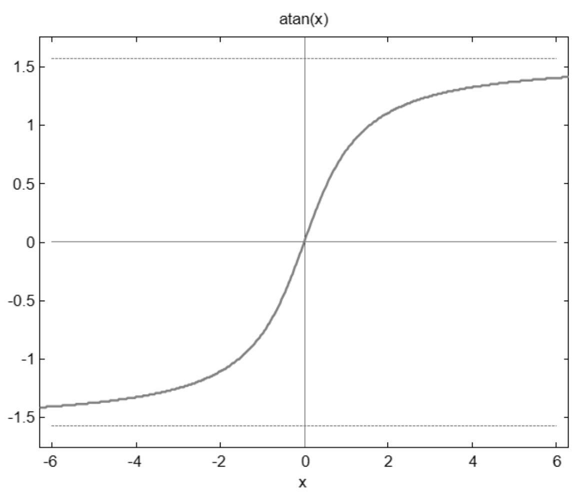
例 2 数列 $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ 与 $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ 有界.

例 3 反正切函数 $y=arctgx$ 与反余切函数 $y=arc\ ctgx$ 在 R 有界（如下图）.

事实上，$\exists \mathrm{M}=\dfrac{\pi}{2}>0, \forall x \in R,$ 有 $|arctgx|<\dfrac{\pi}{2},$

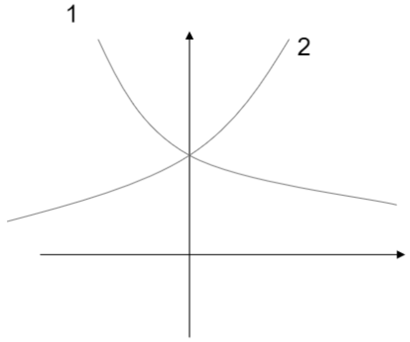
与 $\exists \mathrm{M}=\pi>0, \forall x \in R,$ 有 $|arc\ ctgx|<\pi$

arctgx 图像

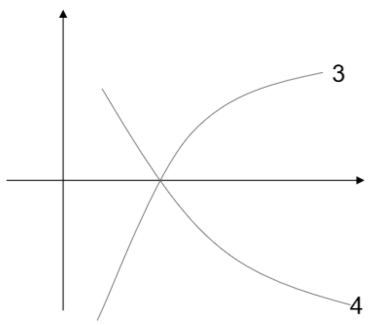


例 4 数列$\{n\}$有下界无上界;数列$\{(-1)^n n\}$既无上界也无下界.

例 5 指数函数$y=a^x(0<a\neq 1)$在R有上界无下界(如图 1.12);对数函数$y=\log_a^x(0<a\neq 1)$在区间$(0,+\infty)$既无上界也无下界(如图 1.13).



$y=a^x(0<a\neq 1)$

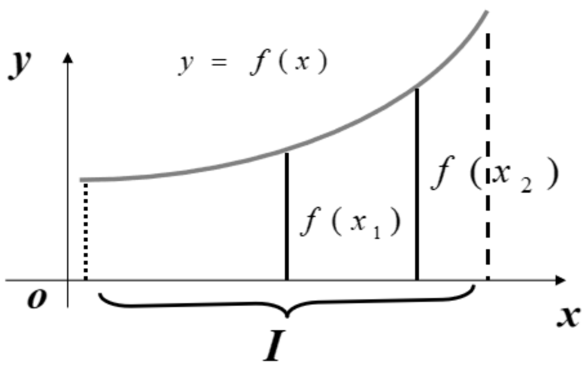


$y=\log_a^x(0<a\neq 1)$

2.单调函数

设函数$f(x)$的定义域为D, 区间$I\in D$, 恒有(1) $f(x_1)<f(x_2)$,

则称函数$f(x)$在区间I上是单调增加的;



设函数$f(x)$的定义域为D, 区间$I\in D$,

《数学分析》考研核心笔记

第 1 章　实数集与函数

考研提纲及考试要求

考点：实数及其性质：
考点：实数的一些主要性质
考点：绝对值与不等式
考点：几个重要不等式
考点：有界数集确界原理

考研核心笔记

【核心笔记】实数

1. 实数及其性质

回顾中学中关于有理数和无理数的定义.

有理数：$\begin{cases} 能用互质的分数\dfrac{p}{q}(p,q为非负整数，且q\neq 0)表示的数 \\ 有限十进小数或无限十进循环小数表示的数 \end{cases}$

若规定：

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)99\cdots9\cdots$$

则有限十进小数都能表示成无限循环小数。

当 $x=a_0$ 为整数时，则记为 $x=(a_0-1).9999\cdots$

（1）实数大小的比较

定义 1：给定两个非负实数

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\quad y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

其中 a_i b_i 为非负整数，$0\le a_i$ $,b_i\le 9$ 若由

①$a_k=b_k$，$k=0,1,2,\cdots$ 则称 x 与 y 相等，记为 $x=y$

②若存在非负整数 l，使得 $a_k=b_k$，$(k=0,1,2,\cdots,l)$，而 $a_{l+1}>b_{l+1}$，则称 x 大于 y（或 y 小于 x），分别记为 $x>y$（或 $y<x$）。

规定任何非负实数大于任何负实数；对于负实数 x,y，若按定义 1 有 $-x>-y$，则称 $y>x$

（2）实数的有理数近似表示

定义 2：设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数，称有理数 $x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位不足近似值，

而有理数称为 x 的 n 位过剩近似值， $n=0,1,2,\cdots$ 对于负实数

$$\bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

$$x = -a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

x 的 n 位不足近似值规定为：

$$x_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n - \frac{1}{10^n};$$

x 的 n 位过剩近似值规定为：

$$\bar{x}_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

比如 $\sqrt{2}=1.4142\cdots$ 则

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, $\cdots$ 称为 $\sqrt{2}$ 的不足近似值；

1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, $\cdots$ 称为 $\sqrt{2}$ 的过剩近似值。

命题设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$， $y=b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数，则

$x>y \iff$ 存在非负整数 n，使得 $x_n>\bar{y}_n$

2. 实数的一些主要性质

（1）四则运算封闭性:

（2）有序性:即 $a>b \quad a<b \quad a=b$，必有一个成立。

（3）传递性：即 $a>b \ ,b>c \ \Rightarrow a>c$

（4）阿基米德性:即 $\forall a,b\in\mathbf{R},\ b>a>0,\ \exists n\in\mathbf{N},\ \ni\ na>b.$

（5）稠密性:有理数和无理数是稠密性的。

（6）实数集的几何表示———数轴:例如:

$$a=b,\ \iff\ \forall\varepsilon>0,\ |a-b|<\varepsilon.$$
$$\forall\varepsilon>0,\ a<b+\varepsilon\ \Rightarrow\ a\le b$$

3. 绝对值与不等式

绝对值定义： $|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0\\ -a, & a<0\end{cases}$

从数轴上看：绝对值就是到原点的距离：

4. 几个重要不等式

（1）$a^2+b^2\ge 2|ab|$，$|\sin x|\le 1$，$|\sin x|\le|x|$

（2）对 $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，记

$$M(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\quad\text{（算术平均值）}$$

$$G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}},\quad\text{（几何平均值）}$$

$$H(a_i)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}.\quad\text{（调和平均值）}$$

$$H(a_i)\le G(a_i)\le M(a_i),$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

（3）伯努利不等式

这是由于对 $\forall x>0$ 由二项展开式

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+x^n,$$

因此有：$(1+x)^n$ 大于上式右端任何一项.

【核心笔记】数集确界原理

1. 区间与邻域

（1）区间：

$\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)

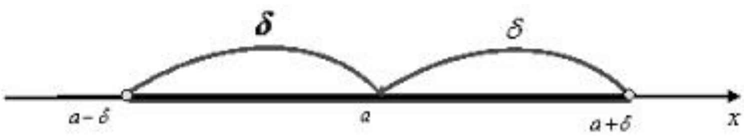
$\{x|a\le x\le b\}$ 称为闭区间，记为 $[a,b]$

半开区间：$\{x|a\le x<b\}$ 称为半开半闭，记为 $[a,b)$

$\{x|a<x\le b\}$ 称为半开半闭，记为 $(a,b]$

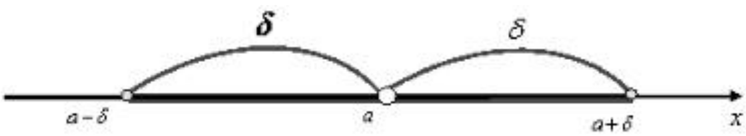
$[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 为无限区间。

（2）邻域 $U_\delta(a)=\{x\,||x-a|<\delta\}$ 其中 $\delta>0,a\in R$ 称为 a 的 δ 邻域，记为 $U_\delta(a)$



而点集 $U_\delta^0(a)$ 为点 a 的去心 δ 邻域，

即 $U_\delta^0(a)=\{x|a-\delta<x<a\}\cup\{x|a<x<a+\delta\}$



2. 有界数集确界原理

（1）有界数集:

定义(上、下有界,有界)

定义 1：设S为R中的一个数集。若存在数$M(L)$，使得对一切$x\in S$，都有$x\le M(x\ge L)$，则称S为有上界（下界）的数集，数$M(L)$称为S的一个上界S（下界）。若数集S既有上界又有下界，则S为有界集，若S不是有界.则称S为无界集。

例如，闭区间、(a,b)(a、b为有限数)、邻域等都是有界数集，集合$E=\{y\mid y=\sin x,\ x\in(-\infty,+\infty)\}$也是有界数集.

（2）无界数集:对任意$M>0$，存在$\bar{x}\in S,\ |\bar{x}|>M$，则称 S 为无界集。

$(-\infty,+\infty)$，$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$等都是无界数集,例证明集合是无界数集

（3）上下确界

先给出确界的直观定义：若数集 S 有上界，则显然它有无穷多个上界，其中最小的一个上界我们称它为数集 S 的上确界；同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界。

精确定义

定义 2：设 S 是 R 中的一个数集，若数η满足一下两条：

①对一切$x\in S$有$x\le\eta$．即η是数集 S 的上界；

②对任何$\alpha<\eta$存在$x_0\in S$使得$x_0>\alpha$（即η是 S 的最小上界）

则称数η为数集 S 的上确界。记作$\eta=\sup S$

定义 3：设 S 是 R 中的一个数集，若数ξ满足以下两条：

对一切$x\in S$有$x\ge\xi$．即ξ是数集 S 的下界；

对任何$\beta>\xi$存在$x_0\in S$使得$x_0<\beta$（即ξ是 S 的最大下界）

则称数ξ为数集 S 的下确界。记作$\xi=\inf S$

定理 1.1(确界原理).设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界。

数集与确界的关系:确界不一定属于原集合。

（4）确界与最值的关系:设 E 为数集.

①E 的最值必属于 E,但确界未必,确界是一种临界点.

②非空有界数集必有确界(见下面的确界原理),但未必有最值.

③若$\max E$存在,必有$\max E=\sup E$.

对下确界也有类似的结论.

【核心笔记】函数概念

1. 函数的定义

函数的几点说明.

函数的两要素:定义域和对应法则

约定:定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

2026 年郑州大学 655 数学分析考研复习提纲

《数学分析》考研复习提纲

《数学分析》

第 1 章　变量与函数

复习内容：变量
复习内容：函数
复习内容：函数的一些几何特性
复习内容：复合函数
复习内容：反函数
复习内容：初等函数

第 2 章　极限与连续

复习内容：数列极限的定义
复习内容：无穷小数列
复习内容：收敛数列的性质
复习内容：数列极限的运算
复习内容：单调有界数列

第 3 章　关于实数的基本定理及闭区间上连续函数性质的证明

复习内容：子列
复习内容：上确界和下确界
复习内容：区间套定理
复习内容：致密性定理
复习内容：Cauchy 收敛原理
考点;有限覆盖定理
复习内容：有界性定理
复习内容：最大值和最小值定理

第 4 章　导数与微分

复习内容：导数的引进
复习内容：导数的定义及几何意义
复习内容：常数的导数